

БИР ЎЗГАРУВЧИ ФУНКЦИЯСИНING ИНТЕГРАЛ ҲИСОБИ

1- §. Аникмас интеграл ва интеграллашнинг содда усуллари

6.1.1. Бирор ораликда аникланган $f(x)$ функция учун бу ораликнинг ҳамма қийматларида

$$F'(x) = f(x) \text{ ёки } dF(x) = f(x) dx$$

шарт бажарилса, у ҳолда $F(x)$ функция $f(x)$ нинг *бошланғич функцияси* дейилади.

Агар $f(x)$ функция $F(x)$ бошланғич функцияга эга бўлса, у ҳолда $F(x) + C$ $f(x)$ нинг ҳамма бошланғич функциялари тўплами бўлади, бунда C — ихтиёрий ўзгармас. Шунга кўра берилган $f(x)$ функциянинг ҳар қандай иккита бошланғич функцияси бир-биридан ихтиёрий ўзгармасга фарқ қилади.

$f(x)$ (ёки $f(x)dx$ ифода) дан олинган аникмас интеграл деб, бу функциянинг барча $F(x) + C$ бошланғич функциялари тўпламига айтилади ва бундай белгиланади: $\int f(x) dx = F(x) + C$.

Аникмас интегрални топиш жараёни *интеграллаш* дейилади.

6.1.2. Аникмас интегралнинг асосий хоссалари (интеграллаш қоидалари):

- а) $(\int f(x) dx)' = f(x)$;
- б) $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$;
- в) $\int dF(x) = F(x) + C$;
- г) $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ (k — ўзгармас);
- д) $\int (f(x) \pm \varphi(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int \varphi(x) dx$;
- е) агар $\int f(x) dx = F(x) + C$ ва $u = \Phi(x)$ ҳар қандай дифференциалланувчи функция бўлса, у ҳолда:

$$\int f(u) du = F(u) + C.$$

6.1.3. Аникмас интеграллар жадвали:

- 1. $\int du = u + C$.
- 2. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$.

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$
4. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$
6. $\int e^u du = e^u + C.$
7. $\int \sin u du = -\cos u + C.$
8. $\int \cos u du = \sin u + C.$
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$
11. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C.$
12. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$
13. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C = \ln \left| \frac{1}{\sin u} - \operatorname{ctg} u \right| + C.$
14. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right| + C = \ln \left| \frac{1}{\cos u} + \operatorname{tg} u \right| + C.$
15. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{u}{a} + C.$
16. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C.$
17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{u}{a} + C = -\operatorname{arc} \cos \frac{u}{a} + C.$
18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C.$

Интеграллаш натижасининг тўғрилиги топилган бошланғич функцияни дифференциаллаш билан текширилади. Келтирилган жадвалда u эркин ўзгарувчини, шунингдек, дифференциалланувчи функцияни ифодалайди.

6.1.4. Интеграллашнинг қуйидаги содда усуллари келтира-миз:

а) интеграл остидаги функцияни содда функциялар йиғиндисига ёйиш ва интегралларнинг хоссаларидан фойдаланиш усули;

б) дифференциал белгиси остига киритиш усули. Масалан:

$dx = \frac{1}{k} d(kx + a)$, агар a, k — ўзгармас бўлса;

$$\begin{aligned}
 x dx &= \frac{1}{2} d(x^2), \quad \cos x dx = d(\sin x), \\
 \frac{dx}{x} &= d(\ln x), \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x), \quad \frac{dx}{1+x^2} = \\
 &= d(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) \quad \text{ва } x, k.
 \end{aligned}$$

1-мисол. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$ аниқмас интегрални топинг.

Ечиш. Интеграл остидаги функцияни шаклан алмаштириб, аниқмас интегралнинг д) хоссасидан фойдалансак:

$$\begin{aligned}\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx &= \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \left[\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} + \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} \right] dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \arctan x + C.\end{aligned}$$

2-мисол. $\int 4\cos^2 \frac{x}{2} dx$ аниқмас интегрални топинг.

Ечиш. Интеграл остидаги функцияни даражани пасайтириш формуласидан фойдаланиб алмаштирамиз:

$$2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x.$$

Сўнгра аниқмас интегралнинг г) ва д) хоссаларидан фойдалансак,

$$\begin{aligned}\int 4\cos^2 \frac{x}{2} dx &= \int 2(1 + \cos x) dx = 2 \int (1 + \cos x) dx = \\ &= 2 \int dx + 2 \int \cos x dx = 2x + 2\sin x + C.\end{aligned}$$

3-мисол. Аниқмас интегрални топинг:

$$\int 3^x \cdot e^{3x} dx.$$

Ечиш. $\int 3^x \cdot e^{3x} dx = \int (3 \cdot e^3)^x dx = \frac{(3e^3)^x}{\ln(3e^3)} + C.$

4-мисол. Аниқмас интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x-5}}.$$

Ечиш. Дифференциал остига киритиш усулини қўллаймиз. Бунинг учун $dx = \frac{1}{3} d(3x-5)$ деб олиб, жадвалдаги (4) интегралдан фойдаланамиз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x-5}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x-5)}{\sqrt{3x-5}} = \frac{2}{3} \sqrt{3x-5} + C.$$

5-мисол. Аниқмас интегрални топинг:

$$\int \frac{x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$